TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

Leonard Nelson: Das synthetische Apriori der Mathematik

-

Ein Kommentar zu Nelsons Beweis der Synthetizität der mathematischen Erkenntnis

Mitgliederversammlung der PPA, Berlin, 03.11.2018

PD Dr. Kay Herrmann

1. Nelsons begrifflicher Rahmen

analytisch = Wahrheiten der Logik (GS III, S. 11)

synthetisch = nicht logisch wahr (GS III, S. 40, 52); „Widerspruchslosigkeit seiner Verneinung" (GS III, S. 197)

a priori = „unabhängig von aller Erfahrung" (GS III, S. 19), notwendige Wahrheit (GS III, S. 13), allgemeingültig (GS III, S. 12, 52)

a posteriori = zufällige Wahrheit (GS III, S. 13), empirisch (GS III, S.70)

apodiktisch = nicht-empirisch (GS III, S. 51)

empirische Anschauung = Ergebnisse von Beobachtungen (GS III, S. 34)

reine Anschauung = Ideal zur Korrektur der empirischen Anschauung (GS III, S. 34)

Reine Anschauung liegt der empirischen Messung als Bedingung der Möglichkeit zu Grunde (GS III, S. 12 f.)

reine Anschauung (Kant) = **mathematische Anschauung** (Nelson) (GS III, S. 12)

1. Nelsons begrifflicher Rahmen

Der Satz A ist analytisch	Der Satz A ist synthetisch
Nicht-A führt zum Widerspruch	Nicht-A führt nicht zum Widerspruch
Bsp. A: „die Katze hat einziehbare Krallen, [...]" Nicht-A impliziert einen logischen Widerspruch, da im Begriff der Katze eben die Einziehbarkeit der Krallen enthalten ist	Bsp.: A: Bsp.: „Die Katze ist schwarz." Nicht-A impliziert keinen logischen Widerspruch: ohne Widerspruch sind weiße, graue, zimtfarbene, gefleckt Katzen usw. denkbar

2. Das synthetische Apriori und der Wissenschaftlichkeitsanspruch der Philosophie

Negative Bestimmung:

„Wir werden also im Verfolg unter Erkenntnissen a priori nicht solche verstehen, die von dieser oder jener, sondern die **schlechterdings von aller Erfahrung unabhängig** stattfinden.“ (KdfV, 2 f.)

Frage nach einem Unterscheidungskriterium:

„Es kommt hier auf ein Merkmal an, woran wir sicher ein reines Erkenntniß von empirischen unterscheiden können.“ (KdfV, 3)

2. Das synthetische Apriori und der Wissenschaftlichkeitsanspruch der Philosophie

Positive Bestimmung:

„Findet sich also erstlich ein Satz, der zugleich mit seiner **Nothwendigkeit** gedacht wird, so ist er ein Urtheil a priori; ist er überdem auch von keinem abgeleitet, als der selbst wiederum als ein **nothwendiger Satz** gültig ist, so ist er **schlechterdings a priori.** Zweitens: Erfahrung giebt niemals ihren Urtheilen wahre oder strenge, sondern nur angenommene und comparative Allgemeinheit (durch Induction), so daß es eigentlich heißen muss: so viel wir bisher wahrgenommen haben, findet sich von dieser oder jener Regel keine Ausnahme. Wird also ein Urtheil **in strenger Allgemeinhei**t gedacht, d. i. so, daß gar keine Ausnahme als möglich verstattet wird, so ist es nicht von der Erfahrung abgeleitet, sondern **schlechterdings a priori gültig**.“ (KdfV, 3 f.)

2. Das synthetische Apriori und der Wissenschaftlichkeitsanspruch der Philosophie

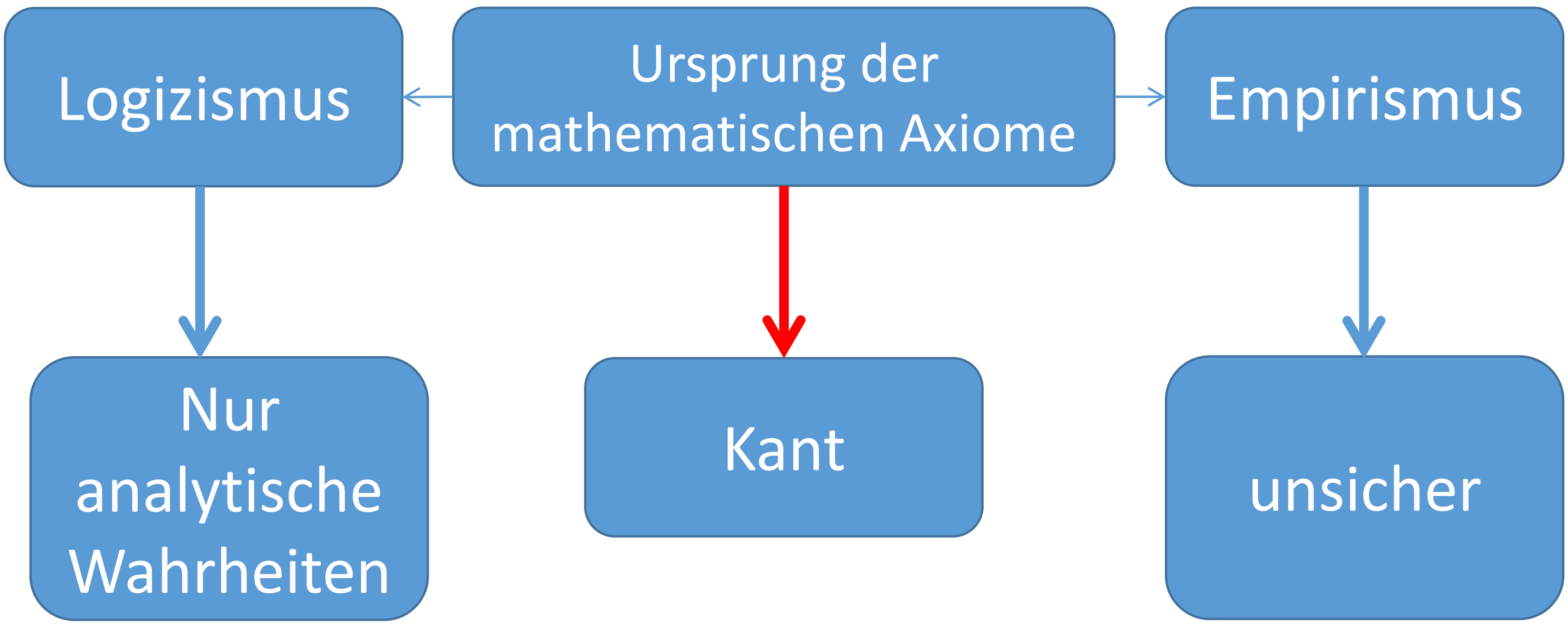
Kant

„Denn wo wollte selbst Erfahrung ihre Gewißheit hernehmen, wenn alle Regeln, nach denen sie fortgeht, immer wieder empirisch, mithin zufällig wären; daher man diese schwerlich für erste Grundsätze gelten lassen kann." (KrV, 5)

Nelson

Die Metaphysik liefert die Kriterien für die **Unterscheidung zwischen** vernünftigen und unvernünftigen sowie zwischen **wissenschaftlichen und unwissenschaftlichen Denkweisen** (GS III, S. 275)

3. Nelsons Konzept der mathematischen Erkenntnis
3.1 Zur Rolle der Anschauung

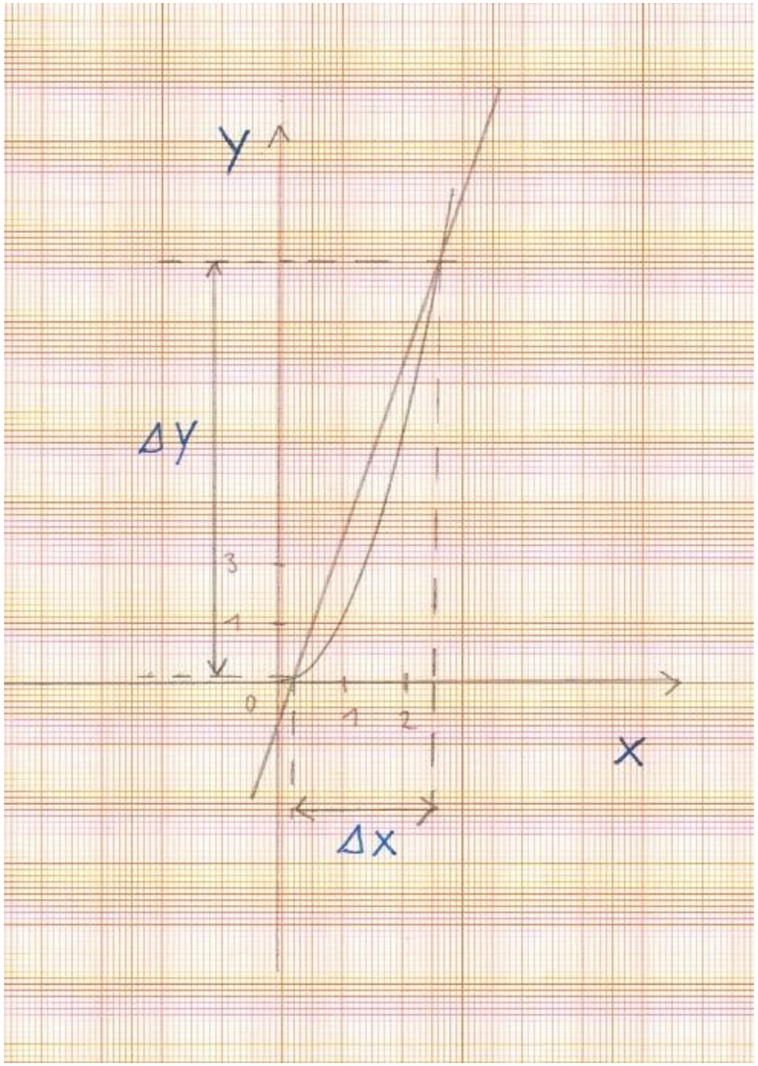


3. Nelsons Konzept der mathematischen Erkenntnis
3.1 Zur Rolle der Anschauung

Grundthese von Nelsons Philosophie der Mathematik

Weder die Logik noch die Erfahrung können Erkenntnisquelle mathematischer Urteile sein, vielmehr gründen die mathematischen Sätze in der mathematischen Anschauung (GS III, S. 10 f.)

3. Nelsons Konzept der mathematischen Erkenntnis
3.1 Zur Rolle der Anschauung



Ableitung einer Funktion:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = l$$

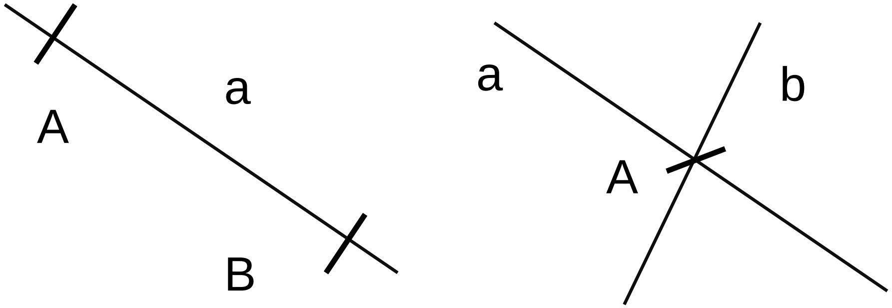
$$\frac{0}{0}$$

Sinnloser Ausdruck

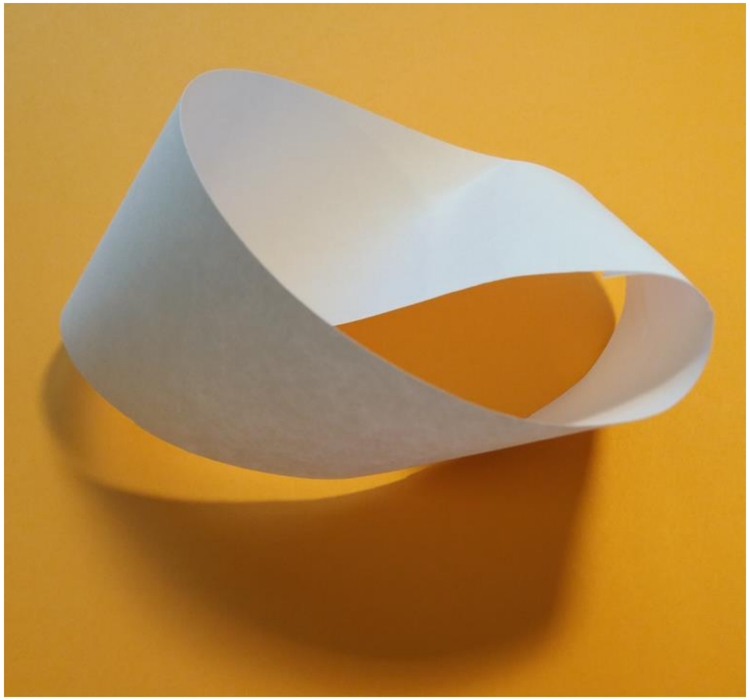
3. Nelsons Konzept der mathematischen Erkenntnis
3.1 Zur Rolle der Anschauung

Raum & Ausdehnung

Projektive Geometrie



Anschauung & Reflexion



3. Nelsons Konzept der mathematischen Erkenntnis
3.1 Zur Rolle der Anschauung

Logische Widerspruchsfreiheit bedeutet noch nicht mathematische Existenz. Bsp.:

- **größte Primzahl**
- **regulärer Siebenflächner**

Konstruierbarkeit in der Anschauung als Kriterium für die mathematische Existenz (GS III, S. 42)

3. Nelsons Konzept der mathematischen Erkenntnis
3.1 Zur Rolle der Anschauung

- Nelson spricht den Begriffen größte Primzahl und regulärer Siebenflächner logische Möglichkeit zu
- Bereits Euklid konnte zeigen, dass die Annahme einer größten Primzahl auf einen logischen Widerspruch führt. Dasselbe gilt für den regulären Siebenflächner. In Euklids Elementen wird bewiesen, dass es genau fünf platonische Körper gibt.
- Für den Kantianer Nelson sind die größte Primzahl oder der reguläre Siebenflächner zwar logisch, aber nicht synthetisch möglich, weil sie nicht konstruierbar sind. Aus diesem Blickwinkel zeigt der Beweis von Euklid die synthetische Unmöglichkeit dieser mathematischen Objekte.

Exkurs: Die größte Primzahl ist **nicht ohne logischen Widerspruch** möglich, da gerade die Annahme einer größten Primzahl auf einen logischen Widerspruch führt.

Euklids Beweis: Für eine beliebige endliche Menge $\{p_1, . . . , p_r\}$ von Primzahlen sei $n := p_1 p_2 \cdot \cdot \cdot p_r + 1$ und p ein Primteiler von n. Wir sehen, dass p von allen p_i verschieden ist, da sonst p sowohl die Zahl n als auch das Produkt $p_1 p_2 \cdot \cdot \cdot p_r$ teilen wurde, somit auch die 1, was nicht sein kann. Eine endliche Menge $\{p_1, . . . , p_r\}$ kann also niemals die Menge aller Primzahlen sein. (Quelle: M. Aigner, G.M. Ziegler, Das BUCH der Beweise, DOI 10.1007/978-3-662-44457-3_1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015, S. 3)

3.2 Der synthetisch-apriorische Charakter der mathematischen Erkenntnis

a) Apriorität

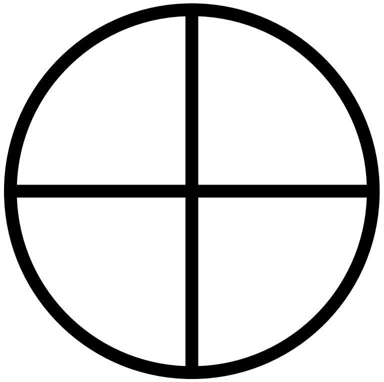
Argumente von Nelson:

- Die Allgemeinheit mathematischer Sätze setze eine andere Quelle voraus als die Wahrnehmung.
- Mathematische Sätzen werden nicht durch Messung der sinnlich gegebenen Körper gewonnen.
- Empirisch könne ein geometrischer Satz weder bestätigt noch widerlegt werden.

3.2 Der synthetisch-apriorische Charakter der mathematischen Erkenntnis

a) Apriorität

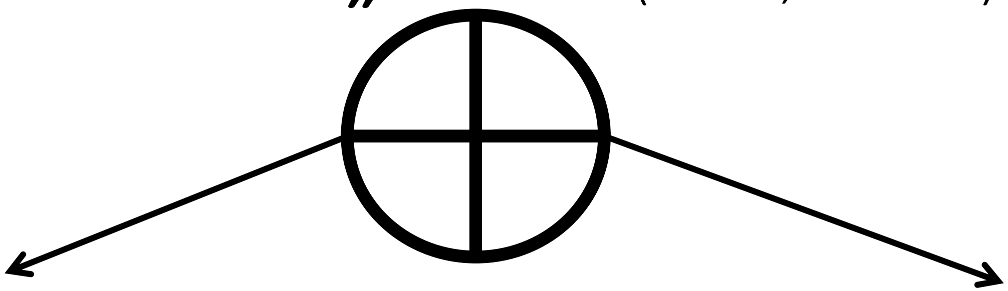
Der Satz von der Gleichheit aller Radien eines Kreises gilt ausnahmslos für alle Kreise, dennoch ist er nicht geeignet, die Form jedes einzelnen Rades zu beschreiben (GS III, S. 28).



3.2 Der synthetisch-apriorische Charakter der mathematischen Erkenntnis

b) Synthetizität

„S ist P“ (GS III, S. 61 f.)



analytisch
[P] ist in (S) enthalten.
Bsp.: (Alle Radien eines Kreises)
[haben dieselbe Länge.]

synthetisch
[P] kommt zu (S) neu hinzu.

$$\text{Bsp.:} \left(\frac{U}{d} =\right) [\,\pi\,]$$

3.2 Der synthetisch-apriorische Charakter der mathematischen Erkenntnis

b) Synthetizität

nicht-logischer Charakter der arithmetischen Urteile

Zu beweisen: 2+2=4.

Bew. von Leibniz: Die Zahlen 2, 3, 4 werden zunächst rein definitorisch eingeführt 2 := 1+1 ; 3 := 2 +1; 4:= 3+1

$2+2 = 2+(1+1) = (2+1)+1 = 3+1 = 4$

- *Das Assoziativgesetz ist keine logische Wahrheit.*

Belege für die Synthetizität der mathematischen Erkenntnis: logisch widerspruchsfreie Möglichkeit nicht-kommutativer und nicht-assoziativer Algebren sowie der nicht-euklidischen Geometrien.

3.2 Der synthetisch-apriorische Charakter der mathematischen Erkenntnis

b) Synthetizität

Der „frühe Nelson“ (1905/06)

- „Die mathematischen Axiome und alle auf ihnen beruhenden Theoreme sind synthetische Urteile.“ (GS III, S. 11)

3.3 Nelsons Fazit

Fazit:

- Die Mathematik könne weder in der Logik noch in der Erfahrung ihre Erkenntnisquelle haben.
- Erkenntnisquelle der Mathematik ist die mathematische Anschauung.

	analytisch	synthetisch
a posteriori	---	Empirie
a priori	Logik	Mathematik

3.3 Nelsons Fazit bis 1905/06 (später von Nelson revidiert)

Mathematische Erkenntnis

Geometrie

Logik (Widerspruchsfreiheit)

Arithmetik

- aus reiner Anschauung (!)
- synthetisch
- a priori

- aus reiner Anschauung (?)
- nicht-logisch (?)
- a priori

- nicht-euklidische Geometrien

- nicht-kommutative Algebra
- nicht-assoziative Algebra

4. Die Säulen des Nelson'schen Mathematikkonzeptes und der moderne Axiombegriff – Ein Bewertungsversuch

a) Anschaulichkeit

Moderner Axiombegriff:

Axiome

- weisen bestimmten Objekten Eigenschaften zu, sind also indirekte Definitionen für die Objekte (vgl. Neßelmann, Axiomatische Geometrie, S. 1)
- sind formale Strukturen ohne inhaltliche Bedeutung (erfahrungsunabhängig)
- müssen nicht zu jeder Zeit als Grundlage dienen (nicht allgemeingültig)
- sollten Hilberts Gütekriterien, *Widerspruchsfreiheit*, *Unabhängigkeit* und *Vollständigkeit*, erfüllen

4. Die Säulen des Nelson'schen Mathematikkonzeptes und der moderne Axiombegriff – Ein Bewertungsversuch

a) Anschaulichkeit

„Es kann folglich auch jeder Existenzbeweis für einen geometrisch nicht darstellbaren und überhaupt nicht unmittelbar anschaulichen Begriff **nur auf Grund einer mittelbaren Berufung auf die Anschauung** geführt werden." (GS III, S. 35.)

Hilberts Entgegnung

„In der Tat, der **Erfolg** ist notwendig; er ist auch hier die höchste Instanz, der sich jedermann beugt." (Hilbert: Über das Unendliche, S. 163)

Bsp.: unendlich ferne Punkte, komplexe Zahlen

4. Die Säulen des Nelson'schen Mathematikkonzeptes und der moderne Axiombegriff – Ein Bewertungsversuch

a) Anschaulichkeit

Eine „problematische These" Nelsons

„..., daß jedes **mathematische Problem entscheidbar** sein muß"(Nelson: Kritische Philosophie und mathematische Axiomatik, GS III, S. 204)

Widerlegung

A. Church / S. C. Kleene: Es gibt **kein Entscheidungsverfahren**, um die Richtigkeit oder Falschheit aller zahlentheoretischen Sätze festzustellen.

4. Die Säulen des Nelson'schen Mathematikkonzeptes und der moderne Axiombegriff – Ein Bewertungsversuch

b) Analytizität / Synthetizität

- **R** : Algebra
- A:="**R** ist kommutativ" ist nach Nelsons Verständnis synthetisch, da es Algebren (z. B. Quaternionen-Algebra) gibt, in denen **Nicht-A** wahr ist.
- Aber: Vom *synthetischen Charakter* von *A* kann nicht auf die *Synthetizität der Axiome von* **R** geschlossen werden
- Denn: A bezieht sich auf das komplette Axiomensystem, womit über den Charakter der einzelnen Axiome noch nichts gesagt ist.
- Nelson: „*synthetischer Charakter* der mathematischen Axiome"
  → Er scheint er diesen Schluss vollzogen zu haben.

4. Die Säulen des Nelson'schen Mathematikkonzeptes und der moderne Axiombegriff – Ein Bewertungsversuch

b) Analytizität

D1: Ein Satz ist logisch wahr (L-wahr) g.d.w. die ihm zugehörige Satzform unter jeder möglichen Interpretation wahr ist. (vgl. Schurz, Wissenschaftstheorie, 84)

D2: Ein Satz ist definitorisch wahr gdw. seine Wahrheit auf gewissen Bedeutungskonventionen beruht. (vgl. Schurz, Wissenschaftstheorie, 86)

D3: Ein Satz ist analytisch wahr gdw. er logisch wahr oder definitorisch wahr ist (vgl. Schurz, Wissenschaftstheorie, 86).

Nelsons Analytizitätskonzept passt zwar zu dieser aktuellen Definition, er ordnet logische Wahrheiten und definitorische Aussagen den analytischen Aussagen zu, bleibt dennoch vage, wie etwa seine Unterscheidung zwischen formal und analytisch zeit.

4. Die Säulen des Nelson'schen Mathematikkonzeptes und der moderne Axiombegriff – Ein Bewertungsversuch

b) Analytizität

Nelsons Bsp. für eine analytische Aussage:
A: Katze:= fleischfressendes Säugetier mit einziehbaren Krallen
Heute: *definitorisch wahre Aussage*

L-Wahrheit?

Definitorische Wahrheit?

Formal sind solche Sätze, die **aus Sätzen der formalen Logik durch Einsetzen spezieller Begriffe entstehen**, **analytisch** sind alle Sätze, **bei welchen dasjenige, was in ihnen ausgesagt wird in dem Begriff der Dinge, von denen es ausgesagt wird, enthalten ist. In diesem Sinn sind die Gesetze der Arithmetik analytisch, aber nicht formal.** (Nelson, Kritische Naturphilosophie, S. 59) (Nelson, Übungen über Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften, WS 1910 – 1911)

4. Die Säulen des Nelson'schen Mathematikkonzeptes und der moderne Axiombegriff – Ein Bewertungsversuch

b) Analytizität

Der „späte Nelson" (1911/1923)

Nelson, Übungen über Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften, WS 1910/11
Die Gesetze der reinen Arithmetik sind analytisch (Nelson, Kritische Naturphilosophie, S. 55)

Nelson, Kolloquium über Naturphilosophie, SS 1923
„Die synthetische Erkenntnis der Geometrie als solcher ist bei Hilbert verloren gegangen,"(Nelson, Kritische Naturphilosophie, S. 175)

Hilbert nimmt viel in die Definitionen auf, um ein vollständiges System von analytischen Urteilen zu erhalten. (Nelson, Kritische Naturphilosophie, S. 163)

Fazit:

1. Leonard Nelson gehört zu den frühen Interpreten der modernen mathematischen Axiomatik.
2. Nelson entwickelt einen Ansatz für eine transzendentalphilosophische Grundlegung der modernen Mathematik auf der Höhe der Mathematik seiner Zeit.
3. Nelsons Überlegungen zur mathematischen Erkenntnis machen die Möglichkeiten und Grenzen der Übertragbarkeit der kantischen Philosophie auf die moderne Mathematik deutlich.
4. Nelsons Ansatz kam zu früh, enthält Brüche, Inkonsistenzen und bleibt fragmentarisch.
5. Nelsons These von der „Anschaulichkeit und Synthetizität“ der mathematischen Erkenntnisse wird durch Hilberts axiomatische Theorie nicht gestützt, was Nelson selbst später auch zu erkennen scheint.

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!