(Auszug: Kurzreferat, S.1-2, 15, 19-20, 27-28, 63-68)

Die Spiegelungsalgebra des Minkowski-Raumes

und endliche Bispinor-Transformationen

Diplomarbeit

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA

PHYSIKALISCH-ASTRONOMISCHE FAKULTÄT

Eingereicht von: Kay Herrmann

Jena, den 25. Juni 1991

Konventionen

Indizes

Wenn im Text nicht anders festgelegt wird, soll immer gelten:

Spinorindizes (komplexe Darstellung)	$\Omega = 1,2$
Dreierindizes	$a = 1,2,3$
Viererindizes	$\mu = 0,1,2,3$
Spinorindizes (reelle Darstellung)	$\underline{\mu} = \mu + 4 = 4,\ldots,7$
Oktonionische Indizes ($\mathbb{E}_3$)	$A = (a, \underline{\nu}) = 1,\ldots,7$
Oktonionische Indizes ($\mathbb{M}_4$)	$M = (\mu, \underline{\nu}) = 0,1,\ldots,7$
Levi-Civitá -Pseudotensor	$\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}$, $\varepsilon_{0123} = +1$
Tetradenindizes	$(\mu) = 0,1,2,3$

Bezeichnungen

Minkowski-Raum	$\mathbb{M}_4$
Reeller pseudoeuklidischer Raum	$\mathbb{R}^{(K,L)}$
Komplexer pseudoeuklidischer Raum	$\mathbb{C}^{(K,L)}$
Komplexe Dirac-Matrizen (Dim 4)	γ^μ
Reelle Dirac-Matrizen (Dim 8)	$\mathbb{J}^\mu$
Komplexe Pauli-Matrizen (Dim 2)	$\mathbb{\sigma}^a$
Reelle Pauli-Matrizen (Dim 4)	$\mathbb{I}_a$
Oktonionische Basiseinheiten ($\mathbb{E}_3$)	$(\Gamma_a ; \Gamma_\mu)$
Oktonionische Basiseinheiten ($\mathbb{M}_4$)	
a) Komplexe Verallgemeinerungen der $\mathbb{E}_3$-Oktonionen	$(\Pi_\lambda, \overset{*}{\Pi}_\lambda ; \Gamma_\mu)$
b) $\mathbb{M}_4$-Oktonionen vom Spinor-Typ	$(S_{\underline{\mu}}, \Pi_{\underline{\mu}} ; \Theta_\mu)$
c) $\mathbb{M}_4$-Oktonionen vom Bispinor-Typ	$(\Omega, \Psi ; \Theta_\mu)$
Reeller Spiegelungsoperator	$\mathbb{P} = \eta_\mu \mathbb{J}^\mu$
Komplexer Spiegelungsoperator	$P = \eta_\mu \gamma^\mu$
Oktonionischer Spiegelungsoperator für den Vektoranteil	$\mathbb{V}$
Oktonionischer Spiegelungsoperator für den Spinoranteil	$\mathbb{W}$
Erzeugende der Clifford-Algebra N-ter Ordnung	P_k
Bispinor-Affinitäten	Π_μ
Abbildungsvorschrift für eine Zahl Z	$\mathbb{A}(\,.\,)$

Andere Vereinbarungen

Kommutator	$[A, B] = AB - BA$
Antikommutator	$\{A, B\} = AB + BA$

Symmetrisierung $\underset{a}{\eta}{}_{[k}\,\underset{b}{\eta}{}_{l]} = \underset{a}{\eta}{}_{k}\,\underset{b}{\eta}{}_{l} - \underset{a}{\eta}{}_{l}\,\underset{b}{\eta}{}_{k}$

Antisymmetrisierung $\underset{a}{\eta}{}_{\{k}\,\underset{b}{\eta}{}_{l\}} = \underset{a}{\eta}{}_{k}\,\underset{b}{\eta}{}_{l} + \underset{a}{\eta}{}_{l}\,\underset{b}{\eta}{}_{k}$

Skalarprodukt $\underset{a}{\eta}{}_{k}\,\underset{b}{\eta}{}^{k} = \eta_{(ab)}$

Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention.

Kurzreferat

Der allgemeine Darstellungssatz der Geometrie regt an, auch bei Kovarianz-Untersuchungen von physikalischen Bewegungsgleichungen Spiegelungen als elementarste Symmetrien zu betrachten.

Es wird gezeigt, daß alle Raum-Zeit-Symmetrien der physikalischen Bewegungsgleichungen im flachen Raum durch Spiegelungen darstellbar sind.

Mit Hilfe von Clifford-Algebren kann eine algebraische Formulierung des allgemeinen Darstellungssatzes der Geometrie gefunden werden. Eine für dieses Problem spezifizierte Clifford-Algebra wird Spiegelungsalgebra genannt.

Die Spiegelungsalgebra ist geeignet, der Lorentz-Transformationsmatrix für Bispinoren und der Transformationsbeziehung für Ortsvierervektoren eine geometrische Deutung zu geben, ohne auf eine physikalische Theorie rückgreifen zu müsen. Man erhält beide Transformationsmatrizen aus einer spiegelungsalgebraischen Transformationsvorschrift in expliziter Gestalt.

Die Oktonionen-Algebra ermöglicht die Darstellung von Spiegelungen an Hyperebenen, die nicht durch den Ursprung der Koordinatensystems führen. Neben den allgemeinen Spiegelungen gewinnt man auch die Transformationsgesetze neuer geometrischer Objekte.

-N=4 ==> Clifford-Zahlen

Im Folgenden sollen Rechenregeln für drei Algebren bereitgestellt werden, die für die vorliegende Arbeit von Wichtigkeit sind. Herleitungen für die Rechenregeln sind z.B. in /2/, /4/, /14/, /18/ zu finden.

- Die Pauli-Algebra

(2.53) $$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_a \sigma_b = -\delta_{ab} + \varepsilon_{abc}\sigma_c$$

Mit Hilfe der Pauli-Algebra kann der Spinvektor $\vec{\Sigma} = (i\sigma_a)$ dargestellt werden.

- Die Clifford-Algebra (N=4) /4/, /14/

(2.54) $$\gamma_\mu = \left(\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_a \\ -\sigma_a & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Die Dirac-Matrizen γ_μ sind die Erzeugenden der 16 Diracschen Basiseinheiten.

(2.55)

a) $$\gamma = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0$$

b) $$\gamma^2 = \mathbb{1}$$

c) $$S_{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

d) $$\gamma^\mu\gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} + 2S^{\mu\nu}$$

e) $$S^{\mu\nu}S^{\varrho\sigma} = -\frac{1}{2}(\eta^{\nu\varrho}S^{\sigma\mu} + \eta^{\nu\sigma}S^{\mu\varrho} + \eta^{\mu\sigma}S^{\varrho\nu} + \eta^{\mu\varrho}S^{\nu\sigma})$$
$$-\frac{1}{4}\eta^{\mu\varrho}\eta^{\nu\sigma} + \frac{1}{4}\eta^{\nu\varrho}\eta^{\mu\sigma} - \frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\gamma$$

f) $$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}$$

g) $$(\gamma_\Omega) = (\mathbb{1}, \gamma_\mu, i\gamma_\mu\gamma, \frac{2}{i}S_{\mu\nu}, \gamma), \Omega = 1, 2, \ldots, 16$$

(Basiseinheiten der Algebra.)

h) $$\gamma_\Omega\gamma^\Omega = \mathbb{1} + \gamma_\mu\gamma^\mu - 2S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - \gamma_\mu\gamma\gamma^\mu\gamma + \gamma^2 = 16$$

i) $$\gamma^\Omega_{\mu\nu}\gamma_\Omega^{\varrho\sigma} = 4\delta_{\nu\varrho}\delta_{\mu\sigma}$$

(Pauli-Fierz-Identitäten)

j) $$[S_{\mu\nu}, S_{\varrho\sigma}] = S_{\mu\sigma}\eta_{\varrho\nu} + S_{\nu\varrho}\eta_{\sigma\mu} + S_{\varrho\mu}\eta_{\sigma\nu} + S_{\sigma\nu}\eta_{\varrho\mu}$$

3. Der geometrische und der physikalische Spiegelungsbegriff

Das Verhalten physikalischer Grundgleichungen bei Spiegelung ist deshalb interessant, weil sich alle Bewegungen durch Spiegelungen darstellen lassen /1/, /2/, /10/.
Während es beim geometrischen Spiegelungsbegriff nur um Spiegelungen des Raum-Zeit-Kontinuums geht, beinhaltet der physikalische Spiegelungsbegriff zusätzliche Operationen, die an den betroffenen Größen auszuführen sind /2/, /11/.
Wie das folgende Beispiel zeigt, stößt man in der Feldtheorie oft recht überraschend auf Spiegelungssymmetrien.
In der vorliegenden Arbeit wird versucht, dem Vorkommen von Spiegelungen in der relativistischen Feldtheorie systematischer nachzugehen. Dabei haben wir uns vom allgemeinen Darstellungssatz der Geometrie leiten lassen /1/, /2/, /10/:
"**Jede Bewegung eines N-dimensionalen euklidischen Raumes kann durch maximal (N+1) Spiegelungen an geeignet gewählten Hyperebenen erzeugt werden.**"
Der Darstellungssatz kann auch für pseudoeuklidische Räume verwendet werden.
Im nachfolgenden Beispiel soll das System Dirac-Feld und Maxwell-Feld auf Invarianz gegenüber einer Transformation geprüft werden, deren Charakter zunächst noch offen bleibt.
Die Lagrange-Dichte hat die Gestalt /11/:

(3.1)
$$L = -\frac{\hbar c}{2}\Big\{\bar{\Psi}\gamma^{\mu}(\Psi_{,\mu} - i\alpha A_{\mu}\Psi) - (\bar{\Psi}_{,\mu} - i\alpha A_{\mu}\bar{\Psi})\cdot\gamma^{\mu}\Psi + 2\frac{m_0 c}{\hbar}\bar{\Psi}\Psi\Big\} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}H^{\mu\nu}.$$

Wir machen für die Transformation die folgenden allgemeinen Ansätze:

(3.2)
$$\Psi' = \mathbb{B}\Psi \quad ; \quad \bar{\Psi}' = \bar{\Psi}\mathbb{B}^{-1}$$
$$A^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}A^{\nu} \; ; \quad \partial_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}{}^{\nu}\partial_{\nu}$$
$$\gamma'^{\mu'} = \gamma^{\mu}.$$

Nacheinander werden die einzelnen Summanden auf ihre Invarianz untersucht.

a) $\bar{\Psi}' \gamma^{\mu'} \partial_{\mu'} \Psi' = \bar{\Psi} B^{-1} \gamma^{\mu} \eta_{\mu}{}^{\nu} B \partial_{\nu} \Psi$

Als Bestimmungsgleichung für $\eta_{\mu}{}^{\nu}$ findet man

(3.3) $\gamma^{\nu} = B^{-1} \gamma^{\mu} B \eta_{\mu}{}^{\nu}$

Gehen wir mit dem Ansatz

$$B = \frac{n^{\kappa}}{c^2} \gamma \gamma_{\kappa} \; ; \; B^{-1} = n^{\lambda} \gamma_{\lambda} \gamma \; ; \; c^2 = n_{\kappa} n^{\kappa}$$

in (3.3) ein, so finden wir nach einiger Rechnung:

(3.4) $\eta_{\mu}{}^{\nu} = \left(\delta_{\mu}{}^{\nu} - \frac{2}{c^2} n_{\mu} n^{\nu} \right).$

Diese Matrix erweist sich als Spiegelungsmatrix.

b)

(3.5) $\bar{\Psi}' \gamma^{\mu'} A_{\mu'} \Psi' = \bar{\Psi} B^{-1} \gamma^{\mu} \eta_{\mu}{}^{\nu} A_{\nu} B \Psi$

Aus (3.5) liest man die bekannte Beziehung

(3.6)

$$\gamma^{\nu} = B^{-1} \gamma^{\mu} B \eta_{\mu}{}^{\nu}$$

ab.

c)

(3.7) $\bar{\Psi}'_{,\mu'} \gamma^{\mu'} \Psi' = \bar{\Psi}_{,\mu} B^{-1} \eta_{\mu}{}^{\nu} \partial_{\nu} \gamma^{\mu} B \Psi$

Aus (3.7) folgt wieder die Beziehung (3.6).

d)

(3.8) $\bar{\Psi}' \Psi' = \bar{\Psi} B^{-1} B \Psi = \bar{\Psi} \Psi$

e)

(3.9) $B'_{\mu\nu} H'^{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\lambda} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\lambda} B_{\rho\lambda} H^{\rho\lambda}$

Aus $\det(B'_{\mu\nu} H'^{\mu\nu}) = \det(B_{\rho\lambda} B^{\rho\lambda})$ folgt $\det(\eta_{\mu}{}^{\nu}) = \pm 1$

Wir wählen den Fall $\det(\eta_{\mu}{}^{\nu}) = -1$.

Die Spiegelungssymmetrie hat sich in diesem Fall als die elementarste Symmetrie erwiesen.

5. Anwendung der Spiegelungsalgebra auf den $\mathbb{M}_4$

5.1. Die spezielle Spiegelungsalgebra des $\mathbb{M}_4$

Unter einer speziellen Spiegelungsalgebra wird eine Spiegelungsalgebra verstanden, die Spiegelungen an Ebenen realisiert, die durch den Ursprung des Koordinatensystems verlaufen.
Die Dirac-Matrizen sind die Erzeugenden der Clifford-Algebra des Minkowski-Raumes. Aus diesem Grunde definieren die Dirac-Matrizen auch die spezielle Spiegelungsalgebra des $\mathbb{M}_4$.
Laut speziellem Darstellungssatz sind zur Erzeugung einer Drehung des $\mathbb{M}_4$ vier Spiegelungen notwendig. Deshalb erhält der Drehoperator die Gestalt:

(5.1)
$$\mathcal{D} = \underset{4}{P}\,\underset{3}{P}\,\underset{2}{P}\,\underset{1}{P} = \underset{4}{n}_\mu \underset{3}{n}_\varsigma \underset{2}{n}_\varkappa \underset{1}{n}_\nu \gamma^\mu \gamma^\varsigma \gamma^\varkappa \gamma^\nu$$
$$P = n_\mu \gamma^\mu \quad ; \quad \{\gamma_\mu , \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} .$$

Mit (5.1) schreiben wir die Transformationsbeziehungen für die Drehung auf:

(5.2)
$$Z' = x'_\mu \gamma^\mu = \mathcal{D} Z \mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D} x_\mu \gamma^\mu \mathcal{D}^{-1}$$
$$= \underset{4}{P}\,\underset{3}{P}\,\underset{2}{P}\,\underset{1}{P}\, x_\mu \gamma^\mu \underset{1}{P}^{-1} \underset{2}{P}^{-1} \underset{3}{P}^{-1} \underset{4}{P}^{-1} .$$

Durch schrittweise Umformung von (5.2) finden wir:

(5.3)
$$\mathcal{D} x_\mu \gamma^\mu \mathcal{D}^{-1} = \underset{4}{P}_\mu{}^\sigma \underset{3}{P}_\sigma{}^\varkappa \underset{2}{P}_\varkappa{}^\varsigma \underset{1}{P}_\varsigma{}^\nu x_\nu \gamma^\mu$$
$$= d_\mu{}^\nu x_\nu \gamma^\mu \quad = x'_\mu \gamma^\mu .$$

Aus (5.3) lesen wir zwei wichtige Beziehungen ab:

(5.4)

a) $$x'_\mu = \underset{4}{P}_\mu{}^\sigma \underset{3}{P}_\sigma{}^\varkappa \underset{2}{P}_\varkappa{}^\varsigma \underset{1}{P}_\varsigma{}^\nu x_\nu = d_\mu{}^\nu x_\nu$$

b) $$\mathcal{D} x_\mu \gamma^\mu \mathcal{D}^{-1} = d_\mu{}^\nu x_\nu \gamma^\mu$$

bzw.

$$\mathcal{D} \gamma_\nu \mathcal{D}^{-1} = \gamma_\mu d^\mu{}_\nu .$$

Die Beziehung (5.4a) gibt die Drehung eines Ortsvierervektors wieder. Die Drehung des Minkowski-Raumes entspricht der Lorentz-Transformation. Wir haben die Lorentz-Tranformationsmatrix

für Vierervektoren in Abhängigkeit von den Normalenvektor-Komponenten der Spiegelhyperebenen gewonnen.
Vergleicht man die Beziehung (5.4b) mit der Transformationsbeziehung (2.45), so wird deutlich, daß $\mathcal{D}$ die Bispinor-Transformationsmatrix für endliche Lorentz-Transformationen ist.

Die Matrix $\mathcal{D}$ soll nun eine praktikablere Gestalt erhalten. Wir gehen deshalb mit den Beziehungen (2.55d) und (2.55e) in den Operatorausdruck (5.1) ein:

(5.5)
$$\mathcal{D} = \underset{4}{\eta}_\mu \underset{3}{\eta}_\nu \underset{2}{\eta}_\varrho \underset{1}{\eta}_\sigma \big(\eta^{\mu\nu}\eta^{\varrho\sigma} + 2\eta^{\mu\nu} S^{\varrho\sigma} + 2\eta^{\varrho\sigma} S^{\mu\nu} - 2(\eta^{\nu\varrho} S^{\sigma\mu} + \eta^{\nu\sigma} S^{\mu\varrho} + \eta^{\mu\varrho} S^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} S^{\varrho\nu}) - \eta^{\mu\varrho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\varrho}\eta^{\mu\sigma} - i\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\gamma \big).$$

Durch Umordnen von (5.5) erhält man:

(5.6)
$$\mathcal{D} = C_1 + iC_2\,\gamma + C_{\mu\nu} S^{\mu\nu}$$

$$C_1 = \eta_{(12)}\eta_{(34)} + \eta_{(23)}\eta_{(14)} - \eta_{(31)}\eta_{(24)}$$

$$C_2 = -\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\underset{1}{\eta}_\mu \underset{2}{\eta}_\nu \underset{3}{\eta}_\varrho \underset{4}{\eta}_\sigma$$

$$C_{\mu\nu} = -\big(\eta_{(12)}\underset{3}{\eta}_{[\mu}\underset{4}{\eta}_{\nu]} + \eta_{(23)}\underset{1}{\eta}_{[\mu}\underset{4}{\eta}_{\nu]} - \eta_{(31)}\underset{2}{\eta}_{[\mu}\underset{4}{\eta}_{\nu]} + \eta_{(14)}\underset{2}{\eta}_{[\mu}\underset{3}{\eta}_{\nu]} - \eta_{(24)}\underset{1}{\eta}_{[\mu}\underset{3}{\eta}_{\nu]} + \eta_{(34)}\underset{1}{\eta}_{[\mu}\underset{2}{\eta}_{\nu]}\big).$$

Da für spätere Untersuchungen die infinitesimalisierte Bispinor-Transformationsmatrix bedeutsam ist, soll durch folgende grobe Überlegung gezeigt werden, welche Gestalt diese Matrix besitzt.

Wir nehmen an, daß die Normalenvektoren nahezu zusammenfallen:

a) $\eta_{(k\ell)} \approx 1$, b) $(\underset{1}{\eta}_\mu) \approx (\underset{2}{\eta}_\mu) \approx (\underset{3}{\eta}_\mu) \approx (\underset{4}{\eta}_\mu) = (\eta_\mu)$

Deshalb folgt:

$$C_1 \rightarrow 1 \;,\; C_2 \rightarrow 0 \;,\; C_{\mu\nu} \rightarrow \tfrac{1}{2}\alpha_{\mu\nu}.$$

Die infinitesimalisierte Matrix hat die Gestalt:

(5.7)
$$\mathcal{D}_{\text{inf.}} = \mathbb{1} + \tfrac{1}{2}\alpha_{\mu\nu} S^{\mu\nu}.$$

$\alpha_{\mu\nu}$: infinitesimale Parameter

7.4. Auslaufende Betrachtungen zu Riemann-Räumen

7.4.1. Der Tangentialraum

Jedem Punkt des gekrümmten Raumes kann ein System linear unabhängiger Vektoren $\lambda^{(\varkappa)}{}_{\mu}$ "angeheftet" werden. Um die Rechnung übersichtlicher zu gestalten, soll angenommen werden, daß die Vektoren $\lambda^{(\varkappa)}{}_{\mu}$ im betrachteten Punkt das lokale Minkowski-System "aufspannen".

(7.29)

$$g_{(\varkappa)(\mu)} = \lambda^{\varrho}{}_{(\varkappa)}\,\lambda^{\nu}{}_{(\mu)}\,g_{\varrho\nu} = \eta_{(\varkappa)(\mu)}$$

$$\eta_{(\varkappa)(\mu)} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$$

Der Übergang zu einem neuen Tetradensystem wird durch folgende Transformationsbeziehung beschrieben:

(7.30)

$$\lambda^{(\mu)'}{}_{\varrho} = A^{(\mu)'}{}_{(\mu)}\,\lambda^{(\mu)}{}_{\varrho}\;;\quad A^{(\mu)'}{}_{(\varkappa)}\,A^{(\varkappa)}{}_{(\nu)'} = \delta^{(\mu)'}{}_{(\nu)'}.$$

7.4.2. Aspekte der Spinor- und Bispinor-Übertragung

Eine ausführliche Darstellung des Problemkreises Spinor- und Bispinor-Übertragung ist in /3/ zu finden.

Im Folgenden sollen einige Grundgedanken dargestellt werden. Es interessieren nur kontravariante Spinoren φ^{Ω}. Die Übertragung der kovarianten Spinoren φ_{Ω} erfolgt analog.

In enger Anlehnung an die Tensorübertragung definiert man die kovariante Ableitung folgendermaßen:

(7.31)

a) $\varphi^{\Omega}{}_{\|\mu} = \varphi^{\Omega}{}_{|\mu} + \Xi^{\Omega}{}_{\Delta\mu}\,\varphi^{\Delta}\;;\quad \Xi^{\Omega}{}_{\Delta\mu}$:Spinor-Affinitäten

b) $\varphi^{\Omega'}{}_{\|\mu'} = \varphi^{\Omega}{}_{\|\mu}\,A^{\Omega'}{}_{\Omega}\,A^{\mu}{}_{\mu'}.$

Aus (7.31a) und (7.31b) folgt die Transformationsbeziehung für die Spinor-Affinitäten:

(7.32)

$$\Xi^{\Omega'}{}_{\Delta'\mu'} = \Xi^{\Omega}{}_{\Delta\mu}\,A^{\Omega'}{}_{\Omega}\,A^{\Delta}{}_{\Delta'}\,A^{\mu}{}_{\mu'} - A^{\Omega'}{}_{\Omega,\mu}\,A^{\Omega}{}_{\Delta'}\,A^{\mu}{}_{\mu'}.$$

Für die kovariante Ableitung eines metrischen Spinors kann geschrieben werden:

(7.33) $\gamma^{\Omega\Delta}{}_{\parallel\mu} = \gamma^{\Omega\Delta}{}_{,\mu} + \gamma^{\Lambda\Delta}\Xi^{\Omega}{}_{\Lambda\mu} + \gamma^{\Omega\Lambda}\Xi^{\Delta}{}_{\Lambda\mu}$

Analog folgt für die Ableitung der spinoriellen Basisvektoren:

(7.34)
$$\eta^{\dot{\Omega}\Delta}{}_{\parallel\mu} = \eta^{\dot{\Omega}\Delta}{}_{,\mu} + \eta^{\dot{\Lambda}\Delta}\Xi^{\dot{\Omega}}{}_{\dot{\Lambda}\mu} + \Xi^{\Delta}{}_{\Lambda\mu}\eta^{\dot{\Omega}\Lambda} .$$

Für alle weiteren Rechnungen wird postuliert:

(7.35) $\eta^{\dot{\Omega}\Delta}{}_{\parallel\mu} = 0$.

Aus (7.35) folgt mit $\sigma_{\varkappa}{}^{\dot{\Omega}\Delta} = -\eta^{\dot{\Omega}\Delta}\eta_{\varkappa}$ und $\eta_{\parallel\varkappa} = 0$:

(7.36) $\sigma_{\varkappa}{}^{\dot{\Omega}\Delta}{}_{\parallel\mu} = 0$.

Aus der Übertragungsvorschrift für Spinoren (7.30) folgt die Übertragungsvorschrift für Bispinoren:

(7.37)

a) $\Psi_{\parallel\nu} = \Psi_{,\nu} + \Pi_{\nu}\Psi$, Π_{ν} :Bispinor-Affinitäten

b) $\Psi'_{\parallel\nu'} = \mathbb{G}\,\Psi_{\parallel\nu}A^{\nu}_{\nu'}$.

Die Bispinor-Transformationsmatrix soll mit $\mathbb{G}$ bezeichnet werden: $\Psi' = \mathbb{G}\,\Psi$.

Geht man mit (7.37a) in (7.37b) ein, so folgt für die Bispinor-Affinität die Transformationsbeziehung:

(7.38) $\Pi_{\nu'} = A^{\nu}_{\nu'}(\mathbb{G}\,\Pi_{\nu}\mathbb{G}^{-1} - \mathbb{G}_{,\nu}\mathbb{G}^{-1})$

Wegen (7.36) erhält man für die kovariante Ableitung von γ^{μ}:

(7.39)
$$\gamma^{\mu}{}_{\parallel\nu} = \gamma^{\mu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\varkappa\nu}\gamma^{\varkappa} + [\Pi_{\nu}, \gamma^{\mu}] = 0 .$$

Da $\Gamma^{\mu}_{\varkappa\nu}$ Christoffel-Symbole sind, kann auch geschrieben werden:

(7.40)
$$\gamma^{\mu}{}_{\parallel\nu} = \gamma^{\mu}{}_{;\nu} + [\Pi_{\nu}, \gamma^{\mu}] = 0 .$$

Es läßt sich zeigen, daß man mit dem Ansatz

(7.41)
$$\Pi_{\nu} = \frac{1}{4} \gamma_{\varkappa} \gamma^{\varkappa}{}_{;\nu}$$

die Gleichung (7.40) erfüllen kann.

7.4.3. Spiegelungsalgebra in Tangential-Räumen

Zwischen Riemann-Raum und Tangential-Raum besteht der Zusammenhang:

$$\lambda^{(\varkappa)}_{\mu} \lambda^{(\sigma)}_{\nu} \eta_{(\varkappa)(\sigma)} = g_{\mu\nu} \quad , ds^2 = \eta_{(\varkappa)(\sigma)} dX^{(\varkappa)} dX^{(\sigma)} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}.$$

Bezüglich des Tangential-Raumes erfüllen die Dirac-Matrizen $\gamma^{(\varkappa)}$ die Antikommutator-Beziehung:

(7.42)
$$\{\gamma^{(\varkappa)}, \gamma^{(\sigma)}\} = 2\eta^{(\varkappa)(\sigma)} \quad , \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \quad , \gamma^{(\varkappa)} = \lambda^{(\varkappa)}_{\mu} \gamma^{\mu}.$$

Die Spiegelung eines Vektors des Tangentialraumes ist durch folgende Beziehungen festgelegt:

(7.43)
$$n_{(\varkappa)} = \lambda^{(\varkappa)}_{\mu} \gamma^{\mu} \quad , \rho = n_{(\varkappa)} \gamma^{(\varkappa)} = n_{\mu} \gamma^{\mu} \quad ,$$
$$Z' = X'_{(\varkappa)} \gamma^{(\varkappa)} = -\rho X_{(\varkappa)} \gamma^{(\varkappa)} \rho^{-1} = X'_{\mu} \gamma^{\mu} = -\rho X_{\mu} \gamma^{\mu} \rho^{-1},$$
$$\gamma'^{\varkappa'} = \gamma^{\varkappa} \quad ,$$
$$X'_{(\mu)} = \Pi_{(\mu)}{}^{(\nu)} X_{(\nu)} \quad , \Pi_{(\mu)}{}^{(\nu)} = (\eta_{(\mu)}{}^{(\nu)} - \frac{2}{c^2} n_{(\mu)} n^{(\nu)})$$
$$= \lambda_{(\mu)}{}^{\varkappa} \lambda^{(\nu)}{}_{\varsigma} (g_{\varkappa}{}^{\varsigma} - \frac{2}{c^2} n_{\varkappa} n^{\varsigma}) = \lambda_{(\mu)}{}^{\varkappa} \lambda^{(\nu)}{}_{\varsigma} \Pi_{\varkappa}{}^{\varsigma}$$

(7.44)
$$\det \Pi_{(\mu)}{}^{(\nu)} = \det \Pi_{\mu}{}^{\nu} = -1$$

Die Beziehung für die lokale Bispinor-Spiegelung hat die Gestalt:

(7.45)
$$\psi' = \rho \psi$$

Wir definieren die Ableitung des Spinors in Analogie zu den Ergebnissen unter 7.4.2. folgendermaßen:

(7.46)
$$\psi_{\parallel\mu} = \psi_{,\mu} + \Pi_{\mu} \psi$$

Da $\Gamma^{\mu}_{\kappa\nu}$ Christoffel-Symbole sind, kann auch geschrieben werden:

(7.40)
$$\gamma^{\mu}{}_{\parallel\nu} = \gamma^{\mu}{}_{;\nu} + [\Pi_{\nu}, \gamma^{\mu}] = 0 \;.$$

Es läßt sich zeigen, daß man mit dem Ansatz

(7.41)
$$\Pi_{\nu} = \frac{1}{4}\gamma_{\kappa}\gamma^{\kappa}{}_{;\nu}$$

die Gleichung (7.40) erfüllen kann.

7.4.3. Spiegelungsalgebra in Tangential-Räumen

Zwischen Riemann-Raum und Tangential-Raum besteht der Zusammenhang:

$$\lambda^{(\kappa)}{}_{\mu}\lambda^{(\sigma)}{}_{\nu}\eta_{(\kappa)(\sigma)} = g_{\mu\nu} \;, \quad ds^2 = \eta_{(\kappa)(\sigma)}dX^{(\kappa)}dX^{(\sigma)} = g_{\mu\nu}dX^{\mu}dX^{\nu}.$$

Bezüglich des Tangential-Raumes erfüllen die Dirac-Matrizen $\gamma^{(\kappa)}$ die Antikommutator-Beziehung:

(7.42)
$$\{\gamma^{(\kappa)}, \gamma^{(\sigma)}\} = 2\eta^{(\kappa)(\sigma)} \;, \quad \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \;, \quad \gamma^{(\kappa)} = \lambda^{(\kappa)}{}_{\mu}\gamma^{\mu}.$$

Die Spiegelung eines Vektors des Tangentialraumes ist durch folgende Beziehungen festgelegt:

(7.43)
$$n_{(\kappa)} = \lambda^{(\kappa)}{}_{\mu}\gamma^{\mu} \;, \quad \rho = n_{(\kappa)}\gamma^{(\kappa)} = n_{\mu}\gamma^{\mu} \;,$$
$$Z' = X'_{(\kappa)}\gamma^{(\kappa)} = -\rho X_{(\kappa)}\gamma^{(\kappa)}\rho^{-1} = X'_{\mu}\gamma^{\mu} = -\rho X_{\mu}\gamma^{\mu}\rho^{-1},$$
$$\underline{\gamma'^{\kappa'} = \gamma^{\kappa}} \;,$$
$$X'_{(\mu)} = \Lambda_{(\mu)}{}^{(\nu)}X_{(\nu)} \;, \quad \Lambda_{(\mu)}{}^{(\nu)} = (\eta_{(\mu)}{}^{(\nu)} - \frac{2}{c^2}n_{(\mu)}n^{(\nu)})$$
$$= \lambda_{(\mu)}{}^{\kappa}\lambda^{(\nu)}{}_{\varrho}(g_{\kappa}{}^{\varrho} - \frac{2}{c^2}n_{\kappa}n^{\varrho}) = \lambda_{(\mu)}{}^{\kappa}\lambda^{(\nu)}{}_{\varrho}\Lambda_{\kappa}{}^{\varrho}$$

(7.44)
$$\det \Lambda_{(\mu)}{}^{(\nu)} = \det \Lambda_{\mu}{}^{\nu} = -1$$

Die Beziehung für die lokale Bispinor-Spiegelung hat die Gestalt:

(7.45)
$$\psi' = \rho\,\psi$$

Wir definieren die Ableitung des Spinors in Analogie zu den Ergebnissen unter 7.4.2. folgendermaßen:

(7.46)
$$\psi_{\parallel\mu} = \psi_{,\mu} + \Pi_{\mu}\psi$$

Aus $\psi' = \rho\,\psi$ folgt mit Berücksichtigung der Forderung, daß die kovariante Ableitung eines Bispinors einen Bispintensor ergeben soll:

(7.47)
$$\psi'_{\parallel\mu'} = \rho\,\psi_{\parallel\mu}\,\gamma_{\mu}{}^{\mu'} .$$

Nur mit solch einer Ableitung kann eine zur Flachraumstruktur analoge Wirkung L für die Dirac-Gleichung in der gekrümmten Raum-Zeit gebildet werden:
$$L \sim \bar{\Psi}\,\gamma^{\varkappa}\,\psi_{\parallel\varkappa} .$$
Wir errechnen die partielle Ableitung des transformierten Bispinors:

(7.48)
$$\psi'_{|\varkappa'} = \gamma^{\sigma}{}_{\varkappa'}\,(\rho\,\psi)_{|\sigma}$$
$$= \gamma^{\sigma}{}_{\varkappa'}\,(\rho\,\psi_{|\sigma} + \rho_{|\sigma}\,\psi) .$$

Auf Grund der Ortsabhängigkeit der Matrix ρ erhält man einen zusätzlichen Term $\rho_{|\sigma}\,\psi$. Im flachen Raum ist wegen der Konstanz der Matrix ρ der Ausdruck $\rho_{|\sigma}$ identisch Null.
Für den Riemann-Raum gilt jedoch die Beziehung:

(7.49)
$$\rho_{|(\sigma)} = \lambda^{\mu}{}_{(\sigma)}\,\rho_{|\mu} \neq 0 .$$

Um den Anschluß an das Transformationsverhalten im flachen Raum zu bekommen, ersetzen wir die partielle Ableitung " $|$ " durch die kovariante Ableitung " $\parallel$ " .
Es ist nun noch für die Bispinor-Affinität eine explizite Form zu finden.
Wir gehen deshalb mit (7.46) in (7.47) ein.

(7.50)
$$\psi'_{\parallel\mu'} = \rho\,\psi_{|\mu'} + \rho\,\Pi_{\mu}\,\gamma^{\mu}{}_{\mu'}\,\psi$$

Die Transformationsvorschrift
$$\psi' = \rho\,\psi$$
setzen wir in (7.46) ein und erhalten:

(7.51)
$$\psi'_{\parallel\mu'} = \rho\,\psi_{|\mu'} + \rho_{|\mu'}\,\psi + \Pi'_{\mu'}\,\rho\,\psi .$$

Berücksichtigen wir, daß wegen $\gamma'_{\mu'} = \gamma_\mu$, $\partial_{\nu'} = \partial_\nu \Lambda_{\nu'}{}^{\nu}$ für die Bispinor-Affinitäten $\Pi'_{\mu'} = \Pi_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}{}^{\mu} \Pi_\mu$ gelten soll, so finden wir durch Gleichsetzung von (7.50) und (7.51):

(7.52)
$$\Pi_\nu = \frac{1}{2} P P_{,\nu} \quad ,$$
$$\Psi_{\|\nu} = \Psi_{,\nu} + \frac{1}{2} P P_{,\nu} \Psi \quad .$$

Die eben gewonnenen Erkenntnisse können bei der Formulierung der Dirac-Gleichung im lokalen Lorentz-System verwendet werden.

(7.53)

a) $$\gamma^\mu \Psi_{\|\mu} + \frac{m_0 c}{\hbar} \Psi = 0$$

b) $$\Psi'_{\|\mu'} = P \Psi_{\|\mu} \Lambda_{\mu'}{}^{\mu}$$

Wendet man die Transformationsvorschrift (7.53b) viermal an, so findet man:

(7.54)
$$\Psi'_{\|\mu'} = \underset{4}{P}\,\underset{3}{P}\,\underset{2}{P}\,\underset{1}{P}\, \Psi_{\|\mu}\, \underset{1}{\Lambda}{}^{\mu}{}_{\varkappa}\, \underset{2}{\Lambda}{}^{\varkappa}{}_{\sigma}\, \underset{3}{\Lambda}{}^{\sigma}{}_{\varrho}\, \underset{4}{\Lambda}{}^{\varrho}{}_{\mu'} \quad .$$

Man identifiziert
$$\mathbb{S} = P_4 P_3 P_2 P_1$$
als lokale Bispinor-Transformationsmatrix für endliche Lorentz-Transformationen und
$$L^{(\mu)}{}_{(\mu)'} = \underset{1}{\Lambda}{}^{(\mu)}{}_{(\varkappa)}\, \underset{2}{\Lambda}{}^{(\varkappa)}{}_{(\sigma)}\, \underset{3}{\Lambda}{}^{(\sigma)}{}_{(\varrho)}\, \underset{4}{\Lambda}{}^{(\varrho)}{}_{(\mu)'}$$
als lokale Vierervektor-Transformationsmatrix für endliche Lorentz-Transformationen.

Die Beziehung (7.54) erhält somit die Gestalt:

(7.55)
$$\Psi'_{\|\mu'} = \mathbb{S}\, \Psi_{\|\mu}\, L^{\mu}{}_{\mu'} \quad .$$

Die dazugehörige Bispinor-Transformation lautet:

(7.56)
$$\Psi' = \mathbb{S} \Psi \quad .$$

Zusammenfassend kann die Dirac-Gleichung und die dazugehörigen Transformationsbeziehungen für die Bispinoren und die Bispinor-Affinitäten folgendermaßen aufgeschrieben werden.

(7.57)

$$\gamma^{\mu}\,\psi_{\parallel\mu} + \frac{m_0 c}{\hbar}\,\psi = 0$$

$$\psi'_{\parallel\mu'} = \rho\,\psi_{\parallel\mu}\,\eta^{\mu}{}_{\mu'}$$

$$\Pi_{\mu'} = (\Pi_{\mu})'$$

$$\rho = n_{\mu}\,\gamma^{\mu} = n_{(\mu)}\,\gamma^{(\mu)}$$

$$\eta^{\mu}{}_{\mu'} = (\,g^{\mu}{}_{\mu'} - \frac{2}{c^2}\,n^{\mu}\,n_{\mu'})$$